

Die Knobelecke

*Mathematik außerhalb des Unterrichts
am Theodor-Heuss-Gymnasium Pforzheim*

Musterlösung 2. Runde 2024/25

Klassenstufen 11 bis 13

Aufgabe 1

Sammy climbed up 3, down 5, up 7 and up 6 rungs, going up 11 in total. Since he started on the middle rung, there are 11 rungs above and 11 rungs below the middle rung. So there are **23 rungs** altogether.

Aufgabe 2

$$\frac{1}{(x+1)y} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} = \frac{1}{(x+1)y} + \frac{y}{(x+1)y} + \frac{x+1}{(x+1)y} = \frac{1+y+x+1}{(x+1)y}$$

$$= \frac{x+y+2}{xy+y}. \text{ Wenn dieser Term den Wert } \frac{1}{4} \text{ haben soll, } \frac{x+y+2}{xy+y} = \frac{1}{4}, \text{ erhalten wir: } 4(x+y+2) = xy+y, \text{ also } 4x+4y+8 = xy+y \text{ und somit } 4x+3y+8 = xy$$

$$\text{bzw. } 20 = xy - 4x - 3y + 12 = (x-3)(y-4). \quad \text{q.e.d.}$$

Die Zahl 20 lässt sich wie folgt als Produkt natürlicher Zahlen schreiben:

$$1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2 = 20 \cdot 1$$

Wenn dabei der erste Faktor $(x-3)$ ist und der zweite Faktor $(y-4)$, dann entspräche das den Werten $(x|y) \in \{ (4|24), (5|14), (7|9), (8|8), (13|6), (23|4) \}$, was für das Produkt xy die Werte $\{ 96, 70, 63, 64, 78, 92 \}$ ergibt. **63** ist also das kleinstmögliche Produkt xy .

Aufgabe 3

Wegen $\angle PBQ = 60^\circ$ ist (aus Symmetriegründen) $\triangle BPQ$ gleichseitig. Daher ist $\angle MPQ = \angle MPB - \angle QPB$
 $= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Und aus $\frac{1}{r} = \cos(30^\circ)$

$$= \sqrt{1 - (\sin 30^\circ)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} \text{ folgt } r = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,155 \text{ LE}$$

